ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES,
ECOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
(Option TA)

CONCOURS D'ADMISSION 1985

***

MATHÉMATIQUES

2ème ÉPREUVE

OPTION T.A.

(Durée 4 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : MATHÉMATIQUE II – T.A.

PROBLEME N° 1

NOTA - 1° - Dans tout l'énoncé, le corps de base est le corps des complexes. La lettre i désigne le symbole des nombres complexes ; la lettre j désigne le nombre complexe défini par :

$$j = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On dit qu'un nombre complexe z est écrit sous forme cartésienne si l'on pose :

$$z = a + b\,i \quad (a, b \text{ étant réels}),$$

et qu'il est écrit sous forme trigonométrique si l'on pose :

$$z = \rho\,(\cos\theta + i \sin\theta) \quad (\text{avec } \rho \geq 0 \text{ et } \theta \text{ réels}).$$

2° - Les lettres m, n, p, q, t, u, v désignent des entiers positifs, éventuellement des entiers positifs ou nuls.

3° - Le symbole C_n^m désigne le nombre de combinaisons de n objets pris m à m ; les candidats peuvent s'ils le désirent le noter $\binom{n}{m}$ au lieu de C_n^m sans que ce fait ait une influence quelconque sur l'appréciation des copies. On convient que si $m > n$, $C_n^m = 0$.

4° - La partie III est indépendante des deux autres parties.

5° - Soit x un nombre réel : on sait qu'il existe un entier relatif unique h tel que $h \leq x < h + 1$. On pose dans le texte $h = E(x)$ (h est la partie entière de x).

6° - A étant une matrice carrée, on note dét A le déterminant de A.

PARTIE I

1° - On pose, n étant un entier positif :

$$S_{2,0}(n) = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{2t} + \ldots = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n}{2})} C_n^{2t}$$

$$S_{2,1}(n) = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots + C_n^{2t+1} + \ldots = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-1}{2})} C_n^{2t+1}$$

Exprimer $S_{2,0}(n)$ et $S_{2,1}(n)$ en fonction de n ; on pourra utiliser la formule du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{m=0}^{m=n} C_n^m x^m$$

2° - On pose maintenant :

$$S_{3,0}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n}{3})} C_n^{3t} \quad ; \quad S_{3,1}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-1}{3})} C_n^{3t+1} \quad ;$$

$$S_{3,2}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-2}{3})} C_n^{3t+2} \ .$$

En utilisant la formule du binôme, former un système de trois équations linéaires à coefficients réels vérifiées par $S_{3,0}(n)$, $S_{3,1}(n)$ et $S_{3,2}(n)$ et exprimer $S_{3,0}(n)$, $S_{3,1}(n)$ et $S_{3,2}(n)$ à l'aide de $\cos\frac{n\pi}{3}$ et $\sin\frac{n\pi}{3}$.

Donner, lorsque n tend vers $+\infty$, un infiniment grand très simple équivalent à chacune des expressions de $S_{3,0}(n)$, $S_{3,1}(n)$ et $S_{3,2}(n)$ trouvées ci-dessus.

3° - On pose cette fois :

$$S_{4,0}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n}{4})} C_n^{4t} \quad ; \quad S_{4,1}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-1}{4})} C_n^{4t+1} \quad ;$$

$$S_{4,2}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-2}{4})} C_n^{4t+2} \quad ; \quad S_{4,3}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-3}{4})} C_n^{4t+3} \ .$$

Calculer des expressions des quatre sommes précédentes, en appliquant une méthode semblable à celle du 2°. Que dire du comportement des quatre sommes lorsque n tend vers $+\infty$?

PARTIE II

1° - On pose, p étant un entier strictement positif : :

$$\alpha = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$$

Calculer, ℓ étant un entier relatif, la somme :

$$\sum_{m=1}^{m=p} \alpha^{\ell(m-1)}$$

en distinguant deux cas, selon que ℓ est, ou non, divisible par p.

2° - On désigne par A_p la matrice carrée à p lignes et p colonnes dont l'élément $a_{u,v}$, intersection de la ligne de rang u et de la colonne de rang v, est défini par :

$$a_{u,v} = \alpha^{(u-1)\ (v-1)}$$

On appelle $\overline{A}_p$ la conjuguée de A_p.

Calculer le produit $A_p\ \overline{A}_p$. En déduire que A_p est régulière. Quelle est la matrice inverse A_p^{-1} ?

3° - Etant donnés les trois entiers naturels, p, q, n tels que $0 \leqslant q \leqslant p - 1 < n$, on pose :

$$S_{p,q}(n) = \sum_{t=0}^{t=E(\frac{n-q}{p})} C_n^{pt+q} \quad ,$$

et l'on se propose de généraliser aux sommes $S_{p,q}(n)$ les résultats de la première partie, et, spécialement, d'examiner le comportement de $S_{p,q}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, p et q étant fixés.

En considérant la formule du binôme, et en y remplaçant x par certains nombres complexes convenablement choisis, écrire un système de p équations du premier degré vérifié par les p sommes $S_{p,q}(n)$, p et n étant fixés, et q prenant les valeurs 0, 1, 2, ... (p - 1), la matrice de ce système étant la matrice A_p étudiée au II - 2°.

Exprimer $S_{p,q}(n)$ en faisant intervenir des fonctions trigonométriques. Donner un infiniment grand très simple équivalent à $S_{p,q}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$, p et q étant fixés ; constater que ce résultat généralise directement ceux de la première partie.

PARTIE III

1° - Posons, t désignant un indice entier, positif ou nul,

$$f_0(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{3t}}{(3t)!} \quad ; \quad f_1(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{3t+1}}{(3t+1)!} \quad ; \quad f_2(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{3t+2}}{(3t+2)!} \cdot$$

Vérifier que les séries entières introduites convergent pour tout x complexe.

Exprimer $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ à l'aide des fonctions élémentaires usuelles. Les expressions trouvées ne devront pas comporter le symbole i, ni le symbole j.

2° - Posons maintenant, t désignant toujours un indice entier positif ou nul :

$$\phi_0(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{4t}}{(4t)!} \quad ; \quad \phi_1(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{4t+1}}{(4t+1)!} \quad ;$$

$$\phi_2(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{4t+2}}{(4t+2)!} \quad ; \quad \phi_3(x) = \sum_{t=0}^{+\infty} \frac{x^{4t+3}}{(4t+3)!} \cdot$$

Vérifier la convergence, pour tout x complexe, des séries entières introduites, puis exprimer $\phi_0(x)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$, $\phi_3(x)$ à l'aide des fonctions élémentaires usuelles.

PROBLEME N° 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par les relations :

$$\forall\, x \in [0, 2\pi[\ , \quad f(x) = x^2 \ ; \ \forall \ x \in \mathbb{R} \ , \ f(x + 2\pi) = f(x).$$

1° - Déterminer les coefficients de Fourier a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, ... de cette fonction f. Soit g la fonction définie par :

$$(1) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \ , \quad g(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right).$$

Y-a-t-il égalité entre g(x) et f(x) ? Calculer, à l'aide de valeurs prises par la fonction g, les deux expressions :

$$S_1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \ , \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cdot$$

2° - Etant donnée une fonction réelle h, définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période 2π, continue par morceaux, soit F la fonction, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$(2) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_0^{2\pi} h(t)\, f(x - t)\, dt.$$

Vérifier que la fonction F est périodique ; préciser, en utilisant la définition de la fonction f, F(x) lorsque $x \in [0, 2\pi[$; en déduire que la fonction F est continue.

3° - En remplaçant dans la relation (2) f(x - t) par g(x - t), où g est la fonction définie par (1), donner le développement en série de Fourier de la fonction F en admettant la légitimité de l'intégration terme à terme de la série de fonctions obtenue. Il est loisible d'utiliser les coefficients de Fourier de la fonction h : α_0, α_n, β_n, n = 1, 2, ...

Application : prendre comme fonction h la fonction $x \longmapsto f(-x)$ et calculer l'expression :

$$S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} \cdot$$